1,8 + 1,5 + 1.0 + 1.0 + 1,8 + 1.0 + 1.0 = 9,1 9 R

Tentamen PDV

blad 1 van 2

1 a) $xu_x + yu_y = u+1$ $u(x, x^2) = x^2$

Karakteristieken:

$\partial x/\partial \tau = x$ $x(s,0) = s$

$\partial y/\partial \tau = y$ $y(s,0) = s^2$

$\partial u/\partial \tau = u+1$ $u(s,0) = s^2$

$\Big\}$ $x = s e^{\tau}$, $y = s^2 e^{\tau}$, $u = \tan(\tau + \arctan(s^2))$

$s = y/x$

$\tau = \ln(x^2/y)$ $\Rightarrow$ $u(x,t) = \tan\left(\ln\left(\frac{x^2}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\right)$

1.0

b) Als de karakteristieken samenvallen met de beginvoorwaarde, ~~en~~ maar de karakteristieken en de beginvoorwaarde geven verschillende informatie, dan werkt deze methode niet (als zelfde info, dan oplossing alleen gegeven op deze curve)

$u(x, f(x)) = x^2$

$x(s,0) = s \rightarrow x = se^{\tau}$ (zoals net)

$y(s,0) = f(s) \rightarrow y = f(s)e^{\tau}$

$u(s,0) = s^2 \rightarrow u = \tan(\tau + \arctan(s^2))$

als $f(s) = s$ dan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,\tau)} = \begin{vmatrix} e^{\tau} & se^{\tau} \\ e^{\tau} & se^{\tau} \end{vmatrix} = 0$

Dus voor $f(x) = x$ werkt het niet, want dan kun je s en τ niet terugomschrijven naar x en y.

0.8

2 a) Neem aan $u(x,t)$ voldoet aan

(*) $u_t - a(x,t)u_{xx} - b(x,t)u_x < 0$ for $(x,t) \in Q_T$.

Neem nu aan dat $u(x,t)$ een lokaal maximum heeft in Q_T, in het punt $(\bar{x}, \bar{t})$. Dan geldt:

$u_t(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ voor $\bar{t} < T$ en $u_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0$ voor $\bar{t} = T$ dus

$\boxed{u_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0}$ voor $\bar{t} \leq T$.

$\boxed{u_x(\bar{x}, \bar{t}) = 0}$ en $\boxed{u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0}$, omdat lokaal maximum.

Dan geldt $u_t(\bar{x}, \bar{t}) - a(\bar{x}, \bar{t})u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - b(\bar{x}, \bar{t})u_x(\bar{x}, \bar{t}) =$
$u_t(\bar{x}, \bar{t}) - a(\bar{x}, \bar{t})u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0$.

dat mag niet, dus:

1.0

Tegenspraak, want $u(x,t)$ voldoet aan (*). Dus $u(x,t)$ heeft geen lokaal maximum in Q_T.

(b) $u_{tt} = -c^2 u_{xx}$ $\quad M = \max\{\max_{0\le t\le T} u(0,t), \max_{0\le t\le T} u(l,t), \max_{0\le x\le l} u(x,0)\}$

in een lokaal maximum geldt $u_t = 0$ $u_x = 0$ $u_{tt} \le 0$ $u_{xx} \le 0$

voor $0 < t < T$ en $0 < x < l$.

Dus $u_{tt} + c^2 u_{xx} \le 0$

Neem bijvoorbeeld $u(x,t) = \frac{1}{2}x^2 + -\frac{1}{2}c^2t^2 + \frac{1}{2}c^2tx$ op $0 \le x \le 1$ $0 \le t \le 1$

0,5

3 $\quad u_n(x,t) = \frac{1}{n}\sin(nx)\, e^{-n^2kt}$

(a) $u_{n_t} = \frac{1}{n}\sin(nx)\, e^{-n^2kt} \cdot (-n^2k) = -nk\sin(nx)\, e^{-n^2kt}$ $\quad \forall x,t$

$u_{n_x} = \frac{1}{n} n \cos(nx)\, e^{-n^2kt}$ $\quad \forall x,t$

0,3 $\quad u_{n_{xx}} = -n\sin(nx)\, e^{-n^2kt} = u_{n_t}/k$ $\quad \forall x,t$

Dus inderdaad $u_{n_t} = k \cdot u_{n_{xx}}$ $\quad \forall x,t$

(b) $\lim_{n\to\infty} |u_n(x,0)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\sin(nx)\right| \le \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0$

want $|\sin(nx)| \le 1$ voor alle n. dus $-0 \le \lim_{n\to\infty} u_n(x,0) \le 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n(x,0) = 0$

Voor $x \neq \frac{k\pi}{n}$ met $k\in\mathbb{Z}$ is $\sin(nx) \neq 0$.

Voor $t<0$

geldt $e^{-n^2kt} \to \infty$ als $n\to\infty$, en $\frac{1}{n}\sin(nx)$ helpt niet:

$\lim_{n\to\infty} |u_n(x,t)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n}\sin(nx)}{e^{n^2kt}}\right| =$

0,3 $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\, \frac{\sin(n+1)x}{\sin nx}\, e^{-kt-2nkt}\right| \ge \left|\frac{n}{n+1} \sin((n+1)x)\, e^{-2nkt}\right| e^{-kt}$

> 1 voor n groot genoeg

dus $\lim_{n\to\infty} |u_n| = \infty$

(c) De oplossing hangt blijkbaar niet continu van de beginvoorwaarden af. Neem $u_1 = 0$ en $u_2 = \frac{1}{n}\sin(nx)\, e^{-n^2kt}$ met n zo groot dat $|u_2| < \varepsilon$ voor $t=0$.
Dan zijn de beginvoorwaarden dus: voor u_1: $f_1(x,0) = 0$
voor u_2: $f_2(x,0) = \frac{1}{n}\sin(nx)$

(0.4) Maar $|u_1 - u_2|$ is

Neem $f_1 = 0$ en $f_2 = \frac{1}{N}\sin(Nx)$ met N zó groot dat $|f_2| < \varepsilon$, voor alle x
voor een gegeven ε.
Dan zijn $u_1 = 0$ en $u_2 = \frac{1}{n}\sin(nx)e^{-n^2kt}$ oplossingen van
$$\begin{cases} u_{i_{tt}} = k\, u_{i_{xx}} \\ u_i(x,0) = f_i \end{cases}$$
Laat nu $n \to \infty$, dan $\varepsilon \to 0$, met
$|f_1 - f_2| = |f_2| < \varepsilon$, maar $|u_1 - u_2| = |u_2| \to \infty$ voor $\forall t<0$ en $n\to\infty$.
Dus ondanks dat de beginvoorwaarden zo dicht bij elkaar zitten, loopt de oplossing sterk uiteen, voor elke $t<0$.
Dit is ook niet zo gek, want terugkijken in de tijd is best lastig, omdat verschillende beginposities ~~naar hetzelfde~~ verschillende oplossingen geven die naar hetzelfde convergeren voor $t \to \infty$)

4 $\frac{du}{dx} = 0 \quad x \in (\alpha, \beta) \qquad u(\alpha) = u_\alpha \quad u(\beta) = u_\beta$
$\hookrightarrow u = g(t)$ voor een zekere functie g.
Neem aan dat de beginvoorwaarde geldt: $u(x,0) = f(x)$.
Neem aan $u = \Sigma\, u_n(x)$

(1.0)

5 (a) Neem aan $u(x,t) = X(x)\,T(t)$. Invullen in pdv geeft:

$$X(x)\,T''(t) + c^2 X(x)'''' T(t) = 0$$

$$\Rightarrow XT'' = -c^2 X'''' T$$

$$\frac{X''''}{X} = \frac{T''}{-c^2 T} = \text{constant} = k$$, want links hangt alleen van x af en rechts alleen van t en gelijkheid moet gelden voor alle x en t.

0.8

Hieruit volgt:

$$X'''' = kX$$

(b) Probeer $k=0$: $X'''' = 0X = 0$.

Dan is X''' constant, dus $u_{xxx} = X''' T = c_{(?)} T(t)$

maar $u_{xxx}(L,t) = X'''(L)\,T(t) = 0$ $\quad T(t) \neq 0$ (we zoeken ~~...~~ non-triviale u)

dus $X'''(L) = 0$. X''' constant $\Rightarrow X'''(x) = 0$

Dus X'' is constant! $u_{xx}(x,t) = X''(x)\,T(t)$

$u_{xx}(L,t) = X''(L)\,T(t) = 0 \quad \Rightarrow X''(L) = 0 \quad$ (want $T(t) \neq 0$)

$\Rightarrow X''(x) = 0$, want X'' constant.

Dus $X'(x) =$ constant, maar $X'(0) = 0$ want $u_x(0,t) = X'(0)\,T(t) = 0$

waaruit volgt $X'(x) = 0$.

Dus $X(x)$ is constant, maar $u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0$, dus

0.4

$X(0) = 0$, dus $X(x) = 0$.

Dus $k=0$ geeft $X(x)=0$ en dat is geen fatsoenlijke eigenfunctie.

Dus $k=0$ is geen eigenwaarde.

(c) $X'''' - \lambda X = 0$

$$XX'''' - \lambda X^2 = 0X = 0$$

$$\int_0^L XX'''' - \lambda X^2\,dx = \int_0^L 0\,dx = 0$$

$$\int_0^L XX''''\,dx = \underbrace{XX'''\Big|_0^L}_{=0} - \int_0^L X'X'''\,dx = -\int_0^L X'X'''\,dx = \underbrace{-X'X''\Big|_0^L}_{=0} - -\int_0^L X''X''\,dx = \int_0^L (X'')^2\,dx$$

0.4

Dus $0 = \int_0^L XX'''' - \lambda X^2\,dx = \int_0^L (X'')^2 - \lambda (X)^2\,dx = \int_0^L (X'')^2\,dx - \lambda \int_0^L X^2\,dx$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\int_0^L (X'')^2\,dx}{\int_0^L X^2\,dx} = \frac{\|X''\|^2}{\|X\|^2}$$

(d) $\lambda = \beta^4 \qquad X'''' = \beta^4 X$

Probeer $X(x) = e^{\lambda x}$ dan $\lambda^4 X = \beta^4 X \Rightarrow \lambda^4 = \beta^4 \Rightarrow \lambda = \pm\beta$ of $\lambda = \pm\beta i$

Algemeen $X(x) = a_1 e^{\beta x} + a_2 e^{-\beta x} + a_3 \cos\beta x + a_4 \sin\beta x$

(5) $\rightarrow X(0) = a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$\rightarrow X'(0) = \beta a_1 - \beta a_2 + \beta a_4 = 0$

$X''(x) = \beta^2 a_1 e^{\beta x} + \beta^2 a_2 e^{-\beta x} \cancel{+} - \beta^2 a_3 \cos\beta x - a_4 \beta^2 \sin\beta x$

$\rightarrow X''(L) = \beta^2 a_1 e^{\beta L} + \beta^2 a_2 e^{-\beta L} - \beta^2 a_3 \cos\beta L - a_4 \beta^2 \sin\beta L = 0$

$X'''(x) = \beta^3 a_1 e^{\beta x} + -\beta^3 a_2 e^{-\beta x} + \beta^3 a_3 \sin\beta x - a_4 \beta^3 \cos\beta x$

$\rightarrow X'''(L) = \beta^3 a_1 e^{\beta L} - \beta^3 a_2 e^{-\beta L} + \beta^3 a_3 \sin\beta L - a_4 \beta^3 \cos Lx = 0$

(0.2)
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ \beta(a_1 - a_2 + a_4) = 0 \\ \beta^2(a_1 e^{\beta L} + a_2 e^{-\beta L} - a_3 \cos\beta L - a_4 \sin\beta L) = 0 \\ \beta^3(a_1 e^{\beta L} - a_2 e^{-\beta L} + a_3 \sin\beta L - a_4 \cos L\beta) = 0 \end{cases}$$

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ wil je niet, dus $\det(\ldots) = 0$

Omdat $\lambda \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0$ dus hier kan je door delen.

$2a_1 = -(a_3 + a_4)$

$2a_1 e^{\beta L} + -(a_3 + a_4)\cos\beta L + (a_3 - a_4)\sin\beta L = 0$

$2a_1(e^{\beta L} + \cos\beta L) - 2a_2 \sin\beta L = 0$

~ rekenwerk

6 $u_t - u_{xx} = F(x,t)$

Maximum principe:

$M = \max\{\max_{0 \le t \le T} g(t), \max_{0 \le t \le T} h(t), \max_{0 \le x \le L} f(x)\}$

$m = \min\{\min_{0 \le t \le T} g(t), \min_{0 \le t \le T} h(t), \min_{0 \le x \le L} f(x)\}$

$m \le u(x,t) \le M$ voor $0 \le x \le L$ en $0 \le t \le T$

Neem aan er bestaan twee oplossingen voor dit 'initial, boundary value' probleem: u_1 en u_2. Bekijk $u = u_1 - u_2$.

Dan $u_t = u_{1t} - u_{2t} = (u_{1xx} + F(x,t)) - (u_{2xx} + F(x,t))$
$= u_{1xx} - u_{2xx} = u_{xx}$
dus u voldoet aan $u_t = u_{xx}$.
$u(0,t) = u_1(0,t) - u_2(0,t) = \cancel{f}\, g(t) - g(t) = 0$
$u(L,t) = u_1(L,t) - u_2(L,t) = h(t) - h(t) = 0$
$u(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = f(x) - f(x) = 0$.
Nu $M = \max\{0, 0, 0\} = 0$ (met M en m zoals
en $m = \min\{0, 0, 0\} = 0$ op vorige pagina).
Het maximum principe geldt, dus $m \leq u(x,t) \leq M$.
dus $0 \leq u(x,t) \leq 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.
Dus u_1 en u_2 zijn identiek, er is dus maar één oplossing.

1.0